第28卷 第2期 工 程 数 学 学 报 Vol. 28 No. 2
2011年04月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Apr. 2011

**文章编号**:1005-3085(2011)02-0187-10

# 假期中顾客以概率 $\theta$ 进入的 $Geo/G/1\,(E, MV)$ 排队系统分析*

魏瑛源[1]， 唐应辉[2,†]， 顾建雄[3]

(1- 河西学院数学系，甘肃 张掖 734000； 2- 四川师范大学数学与软件科学学院，成都 610066；
3- 河西学院物理科学与电子技术系，甘肃 张掖 734000)

**摘 要**: 本文考虑多重休假的 $Geo/G/1$ 离散时间排队系统，其中在服务员休假期间到达的顾客以概率 $\theta\,(0<\theta\leqslant 1)$ 进入系统．通过引入“服务员忙期”和使用全概率分解技术，讨论了队长的瞬时性质，得到了队长瞬时分布的 $z$-变换的递推式，以及队长平稳分布的递推式，并且证明了稳态队长的随机分解性质．最后，给出了在特殊情形下相应的一些结果和数值计算实例．

**关键词**: 离散时间排队；多重休假；$\theta$-进入规则；队长分布；随机分解

**分类号**: **AMS**(2000) 60K25 **中图分类号**: O226 **文献标识码**: A

## 1 引言

近年来，许多文献研究了各种各样的休假排队系统[1-3]，其中顾客的输入率是固定不变的．事实上系统的输入率与服务员是否在岗是有关的，即在服务员休假期间到达系统的顾客不一定进入系统．文献 [4,5] 研究了在服务员休假中到达的顾客以概率 $p\,(0<p\leqslant 1)$ 进入系统的多 (单) 重休假连续时间 $M/G/1$ 排队，文献 [6] 研究了离散时间的 $Geo/G/1$ 排队系统，更一般地，文献 [7] 研究了顾客成批到达、服务员不可靠的延迟多级适应性休假的离散时间 $Geo^X/G/1$ 排队系统．但是，相对连续时间排队系统而言，对离散时间的排队系统研究却较少．随着离散时间排队系统在电信系统、计算机通信网络以及其他相关领域中的广泛应用，使得对各种离散时间排队系统的建模与分析就显得越来越有意义．本文考虑在服务员休假期间到达的顾客以概率 $\theta\,(0<\theta\leqslant 1)$ 进入的离散时间 $Geo/G/1$ 排队系统，其中服务员采取空竭服务多重休假规则．通过定义离散时间下的“服务员忙期”，使用一种直观、简洁的分析方法 (全概率分解技术与更新过程知识相结合)，直接从研究队长的瞬态分布出发 (不首先假定系统处于平稳状态)，首次研究了队长的瞬时分布，不仅得到了在任意时刻 $n$ 队长瞬时分布的 $z$-变换的递推式，并且得到了便于计算队长平稳分布的递推表达式．最后，给出了在特殊情形下相应的一些更简洁的结果和数值计算，而且数值计算表明平稳分布的递推表达式有重要应用价值．

---

**收稿日期**: 2009-07-20. **作者简介**: 魏瑛源 (1970年11月生)，女，副教授. 研究方向：排队论、系统的可靠性和保险风险模型等.

*__基金项目__: 国家自然科学基金 (70871084)；教育部高校博士点专项研究基金 (200806360001)；河西学院科研创新与应用校长基金项目.

†**通讯作者**: 唐应辉 E-mail: tangyh@uestc.edu.cn

## 2 模型描述

考虑一个 $Geo/G/1$ 离散时间排队系统，顾客相继到达的间隔时间和顾客的服务时间都是非负整值随机变量，时间轴被分割成间隔时间相等的时隙(slot)序列，表示为 $0,1,2,\cdots,n$. 我们在整数时刻点 $0,1,2,\cdots,n$ 观察整个排队系统. 由于服务机构性能的不同，顾客的到达与离去的时刻也不同，为了明确规定时刻 $n$ 系统的状态，我们约定如下：

1) 顾客到达只能发生在 $(n^-,n)$ 内，$n=0,1,2,\cdots$；服务的开始和结束都只能发生在 $(n,n^+)$ 内，$n=0,1,2,\cdots$，这样的模型称为晚到系统(late arrival system)；

2) 顾客相继到达的间隔时间序列 $\tau_k$, $k=1,2,\cdots$ 相互独立且服从同一个几何分布 $P\{\tau=j\}=p(1-p)^{j-1}$, $j=1,2,\cdots$, $0<p<1$，并且不同时刻的到达行为是相互独立的；

3) 系统中只有一个服务台，顾客所需服务时间序列 $\chi_k$, $k=1,2,\cdots$ 相互独立且服从同一个一般的离散分布 $P\{\chi=j\}=g_j$, $j=1,2,\cdots$，其概率母函数为

$$G(z)=\sum_{j=1}^{\infty}g_jz^j,\quad |z|<1,$$

平均服务时间为 $\mu\,(1\leqslant\mu<\infty)$；服从FCFS服务规则；

4) 服务员采取空竭服务多重休假规则，即每当系统变空时，服务员就去休假一次，如果休假结束服务员返回系统时，发现系统中已有顾客等待，则服务员立刻开始为顾客服务，一直持续到系统再次变空才又去进行另一次休假，如果休假结束服务员返回系统时，发现系统中无顾客等待，则服务员立即去进行另一次休假，以此类推. 假定服务员的各次休假时间 $V_k$, $k=1,2,\cdots$ 相互独立且服从同一个一般的离散分布 $P\{V=j\}=v_j$, $j=1,2,\cdots$，其概率母函数为

$$V(z)=\sum_{j=1}^{\infty}v_jz^j,\quad |z|<1,$$

平均休假时间为 $E[V]\,(1\leqslant E[V]<\infty)$；

5) 在服务员休假期间到达的顾客以概率 $\theta\,(0<\theta\leqslant 1)$ 进入系统，且每一位到达顾客是否进入系统不仅独立于其他到达顾客是否进入系统，也独立于已到达的顾客数；到达间隔时间、服务时间和休假时间是相互独立的；

6) 系统在 $n=0$ 时刻的顾客数 $N(0)=i\,(i=0,1,2,\cdots)$，且当 $N(0)=0$ 时服务员不去休假，即服务员休假仅在繁忙一段时间后进行(这样假定更符合实际情况，但是平稳结果与此假设无关).

**注1** 本文我们采用 $N(n)$ 表示任意时刻 $n$ 系统中的顾客数，即队长；$\rho=p\mu$, $\bar{p}=1-p$.

## 3 服务员忙期中队长的瞬时分布

我们定义“系统闲期”和“服务员忙期”如下：

“系统闲期”是指从系统刚变空的时刻起直到有一个顾客进入系统为止所经历的时间. 用 $I_k$ 表示第 $k$ 个“系统闲期”长度，则根据模型的假设易得：

当 $N(0)=0$ 时

$$P\{I_k=j\}=\begin{cases}p(1-p)^{j-1}, & k=1,\\ \theta p(1-\theta p)^{j-1}, & k=2,3,\cdots,\end{cases}\qquad j=1,2,\cdots.$$

当 $N(0) = i\,(i = 1, 2, \cdots)$ 时

$$P\{I_k = j\} = \theta p(1-\theta p)^{j-1}, \quad k, j = 1, 2, \cdots .$$

“服务员忙期”是指从服务员开始为顾客服务的时刻起直到系统再次变空为止所经历的时间．令 $b$ 表示由一个顾客开始的“服务员忙期”长度，类似于文献 [6] 中引理 1.1 或文献 [7] 中的引理 1，可得以下引理．

**引理 1**　令

$$B(z) = \sum_{j=1}^{\infty} P\{b = j\} z^j, \quad |z| < 1,$$

则 $B(z)$ 满足方程 $B(z) = G((\bar{p} + pB(z))z)$，并且有均值

$$E[b] = \begin{cases} \frac{\rho}{p(1-\rho)}, & \rho < 1, \\ \infty, & \rho \geqslant 1. \end{cases}$$

又令 $b^{\langle i \rangle}$ 表示由 $i$ 个顾客开始的“服务员忙期”长度，则由于几何分布的“无记忆”性质，$b^{\langle i \rangle}$ 可表示为

$$b^{\langle i \rangle} = b_1 + b_2 + \cdots + b_i, \quad i = 1, 2, \cdots ,$$

而且 $b_1, b_2, \cdots, b_i$ 相互独立，与 $b$ 同分布，所以

$$\sum_{j=1}^{\infty} P\{b^{\langle i \rangle} = j\} z^j = B^i(z), \quad |z| < 1.$$

令

$$Q_j(n) = P\big\{b > n \geqslant 0;\ N(n) = j\big\}, \quad j = 1, 2, \cdots ,$$

表示在 $n = 0$ 时刻忙期 $b$ 刚开始的情况下，在服务员忙期 $b$ 内时刻 $n$ 队长 $N(n) = j$ 的瞬时概率，则由于服务员忙期 $b$ 是由一个顾客开始的“服务员忙期”长度，因此有 $Q_1(0) = 1$，$Q_j(0) = 0$，$j = 2, 3, \cdots$．

**定理 1**　令

$$q_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_j(n) z^n, \quad |z| < 1,$$

则有如下递推式

$$q_1(z) = \frac{B(z)[1 - G(\bar{p}z)]}{(1 - \bar{p}z)G(\bar{p}z)},$$

$$q_j(z) = \frac{1}{G(\bar{p}z)}\Big\{B(z) \sum_{n=j-1}^{\infty} z^n \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k \binom{n}{j-1} p^{j-1} \bar{p}^{n-j+1}$$

$$+ \sum_{i=1}^{j-1} \frac{q_{j-i}(z)}{B^i(z)} \Big[B(z) - G(\bar{p}z) - \sum_{m=1}^{i} \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k}{m} g_k z^k \big(pB(z)\big)^m \bar{p}^{k-m}\Big]\Big\}, \quad j = 2, 3, \cdots ,$$

其中当 $j \leqslant 0$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{j} = 0$．

**证明**　完全类似于连续时间排队系统的文献 [1] 中定理 1 的证明．

## 4 队长的瞬时分布和平稳分布

令

$$P_{ij}(n)=P\big\{N(n)=j\,|\,N(0)=i\big\},\quad p_{ij}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}P_{ij}(n)z^n,\quad i,\,j=0,1,2,\cdots.$$

**定理2** 对于 $|z|<1$，有

$$p_{00}(z)=\frac{1}{1-\bar{p}z}\Big\{1+\frac{pzB(z)[1-V((1-\theta p)z)]}{[1-(1-\theta p)z][1-V((1-\theta p(1-B(z)))z)]}\Big\},\tag{1}$$

$$p_{i0}(z)=\frac{B^i(z)[1-V((1-\theta p)z)]}{[1-(1-\theta p)z][1-V((1-\theta p(1-B(z)))z)]},\quad i=1,2,\cdots,\tag{2}$$

其中 $B(z)$ 由引理1确定.

证明 令

$$s_k=\sum_{m=1}^{k}V_m,\quad k\geqslant 1,\quad s_0=0,$$

因为在时刻 $n$ 队长等于0(即系统中没有顾客)当且仅当时刻 $n$ 落在“系统闲期”中，所以

$$\begin{aligned}P_{00}(n)\ =\ &P\{I_1>n\}+P\{I_1+b\leqslant n<I_1+b+I_2;\ N(n)=0\}\\&+\sum_{m=1}^{\infty}P\big\{s_{m-1}<I_2\leqslant s_m,\ I_1+b+s_m\leqslant n;\ N(n)=0\big\}\\=\ &\bar{p}^n+\sum_{k=2}^{n}P\{I_1+b=k\}(1-\theta p)^{n-k}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{n-m}P\{I_1+b=k\}\sum_{r=m-1}^{n-k-1}P\{s_{m-1}=r\}\\&\times\sum_{l=1}^{n-k-r}P\{V=l\}\sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}(\theta p)^j(1-\theta p)^{r+l-j}P_{j0}(n-k-r-l).\end{aligned}\tag{3}$$

类似地，对 $N(0)=i,\ i=1,2,\cdots$，有

$$\begin{aligned}P_{i0}(n)\ =\ &\sum_{k=i}^{n}P\{b^{\langle i\rangle}=k\}(1-\theta p)^{n-k}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=i}^{n-m}P\{b^{\langle i\rangle}=k\}\sum_{r=m-1}^{n-k-1}P\{s_{m-1}=r\}\\&\times\sum_{l=1}^{n-k-r}P\{V=l\}\sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}(\theta p)^j(1-\theta p)^{r+l-j}P_{j0}(n-k-r-l),\end{aligned}\tag{4}$$

对(3)式和(4)式作 $z$-变换得

$$\begin{aligned}p_{00}(z)=&\frac{1}{1-\bar{p}z}+\frac{pzB(z)}{[1-\bar{p}z][1-(1-\theta p)z]}\\&+\frac{pzB(z)}{[1-\bar{p}z][1-V((1-\theta p)z)]}\sum_{l=1}^{\infty}P\{V=l\}z^l\sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}(\theta p)^j(1-\theta p)^{l-j}p_{j0}(z),\end{aligned}\tag{5}$$

$$p_{i0}(z)=\frac{B^i(z)}{1-(1-\theta p)z}$$
$$+\frac{B^i(z)}{1-V((1-\theta p)z)}\sum_{l=1}^{\infty}P\{V=l\}z^l\sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}(\theta p)^j(1-\theta p)^{l-j}p_{j0}(z),\quad i=1,2,\cdots.\tag{6}$$

由 (5) 式和 (6) 式可得关系式

$$p_{i0}(z)=\frac{[1-\bar{p}z]B^{i-1}(z)}{pz}\Big[p_{00}(z)-\frac{1}{1-\bar{p}z}\Big],\quad i=1,2,\cdots,\tag{7}$$

将 (7) 式代入 (5) 式，可得 (1) 式，从而可得 (2) 式.

**定理 3** 对于 $|z|<1$，有

$$p_{0j}(z)=\frac{pz\{[1-V((1-\theta p)z)]q_j(z)+\delta_j(z)\}}{[1-\bar{p}z][1-V((1-\theta p(1-B(z)))z)]},\quad j=1,2,\cdots,\tag{8}$$

$$p_{ij}(z)=\sum_{k=1}^{i-1}B^{k-1}(z)q_{j-i+k}(z)$$
$$+\frac{B^{i-1}(z)\{[1-V((1-\theta p)z)]q_j(z)+\delta_j(z)\}}{1-V((1-\theta p(1-B(z)))z)},\quad i,\,j=1,2,\cdots,\tag{9}$$

其中 $q_j(z),\,j=1,2,\cdots$，由定理 1 给出，$B(z)$ 由引理 1 确定，且 $B^0(z)=1$；当 $j\leqslant 0$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{j}=0$，并有

$$\delta_j(z)\ =\ B(z)\sum_{k=j}^{\infty}\binom{k}{j}(\theta p)^j(1-\theta p)^{k-j}z^k\sum_{l=k+1}^{\infty}P\{V=l\}$$
$$+\sum_{r=1}^{j-1}\frac{q_{j-r}(z)}{B^r(z)}\Big[V\big((1-\theta p(1-B(z)))z\big)-V\big((1-\theta p)z\big)$$
$$-\sum_{m=1}^{r}\sum_{l=m}^{\infty}\binom{l}{m}P\{V=l\}z^l\big(\theta pB(z)\big)^m(1-\theta p)^{l-m}\Big],\quad j=1,2,\cdots.$$

证明 完全类似于定理 2 的证明.

**定理 4** 令

$$p_j=\lim_{n\to\infty}P\big\{N(n)=j\big\},\quad j=0,1,2,\cdots,$$

则

(I) 当 $\rho\geqslant 1$ 时，$p_j=0,\ j=0,1,2,\cdots$；

(II) 当 $\rho<1$ 时，$\{p_j,\,j=0,1,2,\cdots\}$ 存在且构成概率分布，进一步有如下递推表达式

$$p_0=\frac{(1-\rho)[1-V(1-\theta p)]}{\theta pE[V][1-(1-\theta)\rho]},\tag{10}$$

$$p_j=\frac{1-\rho}{E[V][1-(1-\theta)\rho]}\Big\{\big[1-V(1-\theta p)\big]\varepsilon_j+\sum_{k=j}^{\infty}\binom{k}{j}(\theta p)^j(1-\theta p)^{k-j}\sum_{l=k+1}^{\infty}P\{V=l\}$$

$$+\sum_{k=1}^{j-1}\varepsilon_{j-k}\Big[1-V(1-\theta p)-\sum_{m=1}^{k}\sum_{l=m}^{\infty}\binom{l}{m}P\{V=l\}(\theta p)^m(1-\theta p)^{l-m}\Big]\Big\},\quad j=1,2,\cdots,\tag{11}$$

其中当$j\leqslant 0$时，有

$$\sum_{i=1}^{j}=0,\quad \varepsilon_1=\frac{1-G(\bar p)}{pG(\bar p)},$$

$$\varepsilon_j=\frac{1}{G(\bar p)}\Big\{\sum_{n=j-1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}g_k\binom{n}{j-1}p^{j-1}\bar p^{n-j+1}$$

$$+\sum_{i=1}^{j-1}\varepsilon_{j-i}\Big[1-G(\bar p)-\sum_{m=1}^{i}\sum_{k=m}^{\infty}\binom{k}{m}g_kp^m\bar p^{k-m}\Big]\Big\},\quad j=2,3,\cdots.$$

证明　由

$$p_j=\sum_{i=0}^{\infty}P\big\{N(0)=i\big\}\lim_{n\to\infty}P_{ij}(n)=\sum_{i=0}^{\infty}P\big\{N(0)=i\big\}\lim_{z\to 1^-}(1-z)p_{ij}(z),$$

运用L'Hospital法则，结合定理1、定理2和定理3即得证．当$\rho<1$时，由(10)式和(11)式，通过直接计算可验证

$$\sum_{j=0}^{\infty}p_j=1.$$

**定理5**　令

$$\pi_V(z)=\sum_{j=0}^{\infty}p_jz^j,\quad |z|<1,$$

表示队长平稳分布$\{p_j,\ j=0,1,2,\cdots\}$的概率母函数，则对$\rho<1$，有

$$\pi_V(z)=\frac{1-\rho}{1-(1-\theta)\rho}\frac{(1-\theta z)G(\bar p+pz)-(1-\theta)z}{G(\bar p+pz)-z}\frac{1-V(1-\theta p(1-z))}{\theta p(1-z)E[V]}.$$

证明　由

$$\pi_V(z)=\sum_{j=0}^{\infty}p_jz^j,$$

结合定理4，直接计算即可．

**注2**　定理5表明：稳态队长$L_V$可分解成两个相互独立的随机变量之和$L_V=L+L_d$，其中$L$是无休假的且在闲期中到达的顾客以概率$\theta$进入系统的$Geo/G/1$排队的稳态队长，$L_d$是由休假引起的附加队长．

**推论1**　当$\rho<1$时，平均稳态队长为

$$E[L_V]=\frac{\theta}{1-(1-\theta)\rho}\Big\{\rho+\frac{p^2}{2(1-\rho)}E[\chi^2-\chi]\Big\}+\frac{\theta pE[V^2-V]}{2E[V]},$$

其中

$$E[\chi^2]=\sum_{j=1}^{\infty}j^2g_j<\infty$$

为 $\chi$ 的二阶原点矩，

$$E[V^2]=\sum_{j=1}^{\infty}j^2v_j<\infty$$

为 $V$ 的二阶原点矩.

**证明** 由

$$E[L_V]=\left[\frac{\mathrm{d}\pi_V(z)}{\mathrm{d}z}\right]\Big|_{z=1},$$

并运用 L'Hospital 法则可得.

## 5 一些特殊情形

**推论 2** 若 $\theta=1$，即为空竭服务多重休假的 $Geo/G/1$ 排队，则对 $\rho<1$，有

$$\pi_V(z)=\frac{(1-\rho)G(1-p(1-z))}{G(1-p(1-z))-z}\frac{1-V(1-p(1-z))}{pE[V]},\quad |z|<1.$$

这与文献 [3] 的结果完全一致.

**推论 3** 若 $P\{V=0\}=1$，即为无假期的、且在闲期中到达的顾客以概率 $\theta$ 进入系统的 $Geo/G/1$ 排队，则对 $\rho<1$，有

$$p_0=\frac{1-\rho}{1-(1-\theta)\rho},\quad p_j=\frac{\theta p(1-\rho)}{1-(1-\theta)\rho}\varepsilon_j,\quad j=1,2,\cdots,$$

且其概率母函数为

$$\pi_V(z)=\frac{1-\rho}{1-(1-\theta)\rho}\frac{(1-\theta z)G(1-p(1-z))-(1-\theta)z}{G(1-p(1-z))-z},\quad |z|<1.$$

## 6 数值实例

下面我们通过一些数值结果，说明不同的参数对系统主要性能指标的影响.

假设 $\chi$ 服从均值为 $\mu$ 的几何分布，$V$ 服从参数为 $q$ 的几何分布，利用 (10) 式和 (11) 式，通过计算，表 1 给出了在 $p=0.1$, $\mu=2$ 下，$q$, $\theta$ 分别取：

1) $q=0.02$, $\theta=0.5$; 2) $q=0.02$, $\theta=0.75$; 3) $q=0.05$, $\theta=0.5$; 4) $q=0.05$, $\theta=0.75$ 这四种情形时，队长平稳分布 $\{p_j, j=0,1,2,\cdots\}$ 在 $j=0,1,2,\cdots,10$ 时的计算结果 (小数点后面留四位数).

取 $p=0.1$, $q=0.04$, $\mu=2$, $\theta=0.75$ 时，经过计算得：平均稳态队长 $E[L_V]=1.9776$, $\{p_j, j=0,1,2,\cdots\}$，如表 2.

由此可见，在系统容量设计时，系统容量 $N$ 根本不需设计为无穷大. 但是

$$P\{L_V>E[L_V]\}=\sum_{j=E[L_V]+1}^{\infty}p_j=1-p_0-p_1=0.4557,$$

$$P\{L_V>E[L_V]+1\}=\sum_{j=E[L_V]+2}^{\infty}p_j=1-p_0-p_1-p_2=0.2936.$$

也就是说，如果按平均稳态队长大小为标准进行系统容量设计，则到达的顾客因系统容量不够而溢出的概率为45.57%，如果按比平均队长大1个单位为标准进行系统容量设计，则到达的顾客因系统容量不够而溢出的概率也为29.36%，溢出的概率相当大！所以，在系统容量设计时，我们不能只按平均稳态队长大小为标准来进行系统容量设计！

表1: $q$和$\theta$取不同值时队长的平稳分布

| | $(q=0.02,\ \theta=0.5)$ | $(q=0.02,\ \theta=0.75)$ | $(q=0.05,\ \theta=0.5)$ | $(q=0.05,\ \theta=0.75)$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_0$ | 0.2576 | 0.1801 | 0.4558 | 0.3473 |
| $p_1$ | 0.2116 | 0.1716 | 0.2727 | 0.2619 |
| $p_2$ | 0.1534 | 0.1382 | 0.1385 | 0.1604 |
| $p_3$ | 0.1093 | 0.1090 | 0.0681 | 0.0949 |
| $p_4$ | 0.0777 | 0.0858 | 0.0332 | 0.0559 |
| $p_5$ | 0.0552 | 0.0674 | 0.0162 | 0.0328 |
| $p_6$ | 0.0392 | 0.0530 | 0.0079 | 0.0193 |
| $p_7$ | 0.0278 | 0.0417 | 0.0038 | 0.0113 |
| $p_8$ | 0.0198 | 0.0328 | 0.0019 | 0.0067 |
| $p_9$ | 0.0140 | 0.0257 | 0.0009 | 0.0039 |
| $p_{10}$ | 0.0100 | 0.0202 | 0.0004 | 0.0023 |
| $\sum_{j=0}^{10} p_j$ | 0.9756 | 0.9255 | 0.9994 | 0.9967 |

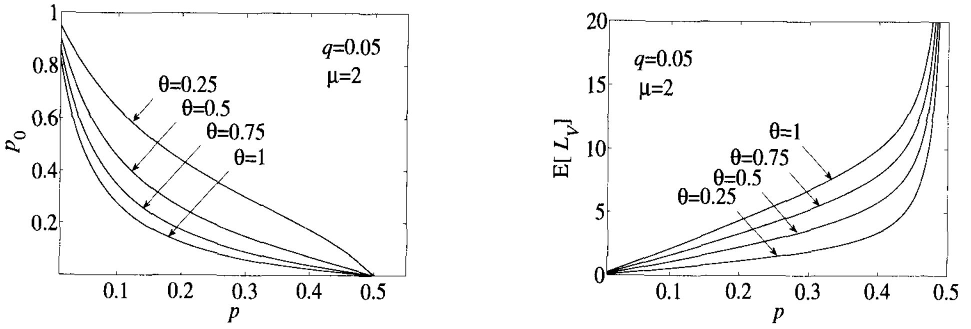
表2: $p=0.1,\ q=0.04,\ \mu=2,\ \theta=0.75$时队长的平稳分布

| $p_0$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_6$ | $p_7$ | $p_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.3008 | 0.2435 | 0.1621 | 0.1048 | 0.0674 | 0.0434 | 0.0279 | 0.0179 | 0.0115 |
| $p_9$ | $p_{10}$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $p_{13}$ | $p_{14}$ | $p_{15}$ | $p_{16}$ | $p_{17}$ |
| 0.0074 | 0.0048 | 0.0031 | 0.0020 | 0.0013 | 0.0008 | 0.0005 | 0.0003 | 0.0002 |
| $p_{18}$ | $p_{19}$ | $p_{20}$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $p_{23}$ | $p_{24}$ | $p_{25}$ | $p_{26}$ |
| 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

如果我们要求溢出的概率不超过万分之一，即溢出的概率不超过0.0001时，那么系统的容量$N$设计为多大才合理呢？由$P\{L_V > N\} \leqslant 0.0001$，可得$N \geqslant 19$，即可取系统容量$N = 19$；如果我们要求溢出的概率不超过千分之一，即溢出的概率不超过0.001时，由$P\{L_V > N\} \leqslant 0.001$，可得$N \geqslant 15$，即系统容量可设计为$N = 15$.

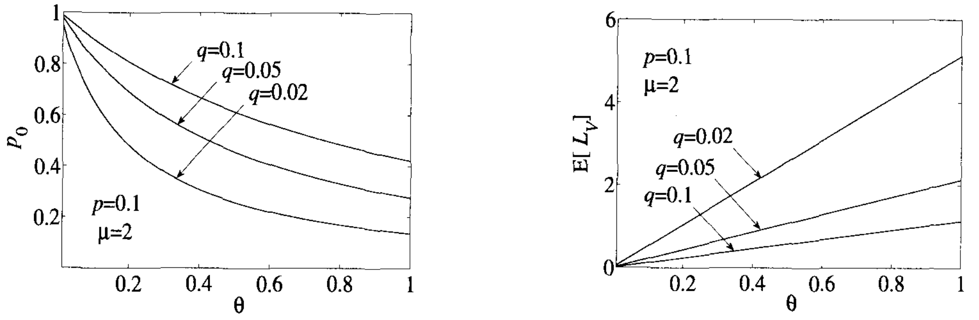
在图1中，取$\mu = 2$，$q = 0.05$，(a)是以$p$为自变量的$p_0$的图形，(b)是以$p$为自变量的$E[L_V]$的图形，分别给出了对应于$\theta = 0.25$，$\theta = 0.5$，$\theta = 0.75$，$\theta = 1$的四条曲线，图1中曲线表明$p_0$是关于$p$的递减函数，$E[L_V]$是关于$p$的递增函数．在图1中我们还可以讨论$\theta$对$p_0$和$E[L_V]$的影响．对比参数$\theta$取不同值时的$p_0$和$E[L_V]$，正如我们所预期的一样，随着$\theta$值的增大，$p_0$减校，而$E[L_V]$增大.

在图2中，取$p = 0.1$，$\mu = 2$，(a)是以$\theta$为自变量的$p_0$的图形，(b)是以$\theta$为自变量的$E[L_V]$的图形，三条曲线分别对应于$q = 0.02$，$q = 0.05$，$q = 0.1$. 图中曲线表明$p_0$是关于$\theta$的递减函数，$E[L_V]$是关于$\theta$的递增函数. 同时对比参数$q$取不同值时的$p_0$和$E[L_V]$，可以观察到随着$q$值的增大，$p_0$增大，而$E[L_V]$减校，这也与直观预期相一致.




(a) 以$p$为自变量时$p_0$的图形　　(b) 以$p$为自变量时$E[L_V]$的图形

图 1:　参数$\theta$的影响




(a) 以$\theta$为自变量时$p_0$的图形　　(d) 以$\theta$为自变量时$E[L_V]$的图形

图 2:　参数$q$的影响

**参考文献:**


[1] Tang Y H. The transient solution for $M/G/1$ queue with server vacations[J]. Acta Mathematica Scientia, 1997, 17(3): 276-283

[2] 唐应辉，唐小我. 排队论—基础与分析技术[M]. 北京：科学出版社，2006
Tang Y H, Tang X W. Queueing Theory—Fundamentals & Analytical Techniques[M]. Beijing: Science Press, 2006

[3] 田乃硕. 休假随机服务系统[M]. 北京：北京大学出版社，2001
Tian N S. Stochastic Service Systems with Vacations[M]. Beijing: Beijing University Press, 2001

[4] 唐应辉，毛勇. 服务员假期中以概率$p$进入的$M/G/1$排队系统的随机分解[J]. 数学物理学报，2004, 24A(6): 683-688
Tang Y H, Mao Y. The stochastic decomposition for $M/G/1$ queue with $p$-entering discipline during server vacations[J]. Acta Mathematica Scientia, 2004, 24A(6): 683-688

[5] 骆川义，唐应辉. 假期中顾客以概率 $p$ 进入的单重休假 $M/G/1$ 排队[J]. 应用数学，2006, 19(2): 246-251
Luo C Y, Tang Y H. The $M/G/1$ queue with single server vacation and $p$-entering discipline during server vacation[J]. Mathematica Applicata, 2006, 19(2): 246-251

[6] Luo C Y, Tang Y H. The transient solution of queue-length distribution for discrete time $Geometry/G/1$ queue[J]. Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities (Series B), 2007, 22(1): 95-100

[7] Tang Y H, Yun X, Huang S J. Discrete-time $Geo^X/G/1$ queue with unreliable server and multiple adaptive delayed vacation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 220: 439-455

# Analysis of the $Geo/G/1\,(E, MV)$ Queueing System with $\theta$-entering Discipline During Server Vacations

WEI Ying-yuan[1], TANG Ying-hui[2], GU Jian-xiong[3]

(1- Department of Mathematics, Hexi University, Zhangye, Gansu 734000;
2- School of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066;
3- Department of Physics and Electronics, Hexi University, Zhangye, Gansu 734000)

**Abstract:** This paper considers a discrete-time $Geo/G/1$ queue with exhaustive service policy and multiple vacations in which the customers enter the system with probability $\theta\,(0 < \theta \leqslant 1)$ during server vacations. By introducing the "server busy period" and using the total probability decomposition technique, the transient property of the queue length is discussed. Also, we obtain the recursion formulae of the $z$-transform of the transient distribution and the stationary distribution for the queue length. The stochastic decomposition property of the steady-state queue length is proved. Finally, we present some corresponding results and numerical examples under special cases.

**Keywords:** discrete-time queue; multiple vacations; $\theta$-entering discipline; queue-length distribution; stochastic decomposition

**Received:** 20 July 2009. **Accepted:** 03 Feb 2010.

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (70871084); the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (200806360001); the Scientific Research Innovation and Application Foundation of President of Hexi University.

†**Corresponding author:** Y. Tang. E-mail address: tangyh@uestc.edu.cn